basic education

Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SENIOR SERTIFIKAAT

GRAAD 12

WISKUNDE V2

NOVEMBER 2024

PUNTE: 150

TYD: 3 uur

Hierdie vraestel bestaan uit 13 bladsye, 1 inligtingsblad en 'n antwoordeboek van 23 bladsye.

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 11 vrae.

2. Beantwoord AL die vrae in die SPESIALE ANTWOORDEBOEK wat verskaf word.

3. Dui ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ens. wat jy in die beantwoording van die vrae gebruik, duidelik aan.

4. Slegs antwoorde sal NIE noodwendig volpunte verdien NIE.

5. Jy mag 'n goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar gebruik (nieprogrammeerbaar en niegrafies), tensy anders vermeld.

6. Indien nodig, rond antwoorde tot TWEE desimale plekke af, tensy anders vermeld.

7. Diagramme is NIE noodwendig volgens skaal geteken NIE.

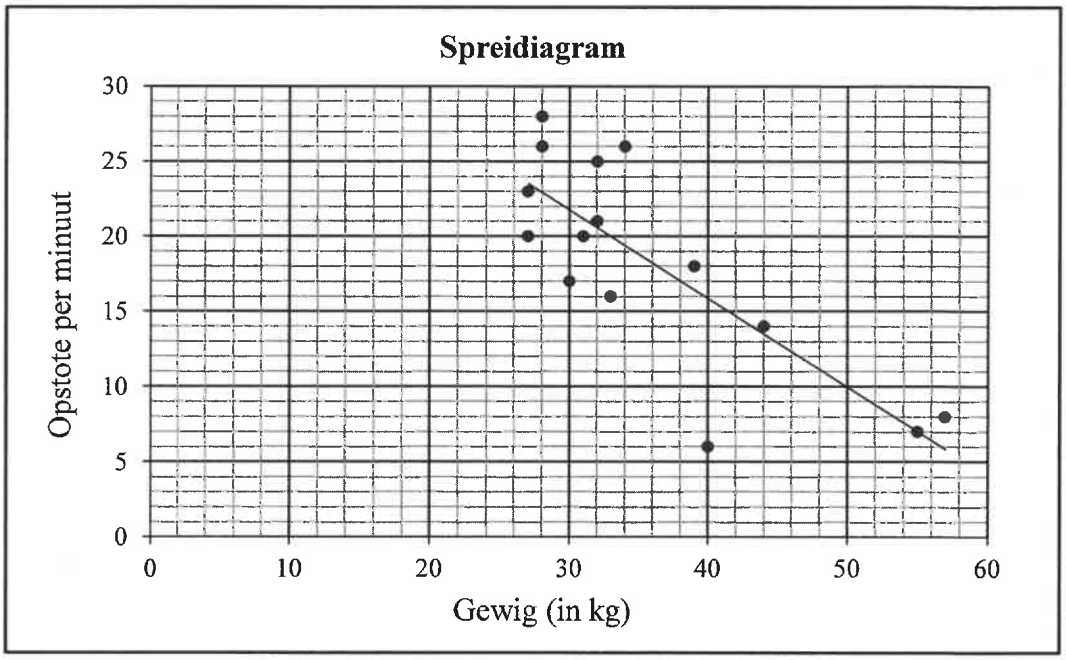
8. 'n Inligtingsblad met formules is aan die einde van die vraestel ingesluit.

9. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

Die afrigter van 'n junior seunsrugbyspan het aan die begin van 'n seisoen die gewig (in kg) van die 15 spelers in sy span en die aantal opstote wat elke speler in een minuut kon doen, aangeteken. Die data word in die tabel en spreidiagram hieronder verteenwoordig. Die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data is geteken.

Gewig (in kg) (x)	34	32	40	27	33	28	27	55	39	44	30	57	28	32	31
Getal opstote per minuut (y)	26	21	6	20	16	26	23	7	18	14	17	8	28	25	20



1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data. (3)

1.2 Skryf die korrelasiekoëffisiënt neer. (1)

1.3 Die afrigter gebruik die kleinstekwadrate-regressielyn om die teiken vir die minimum aantal opstote vir elke spanlid, volgens hulle gewig, te stel. Voorspel die getal opstote wat 'n spanlid wat 29 kg weeg, behoort te doen om die teiken te bereik. (2)

1.4 Skryf die gemiddelde getal opstote vir die gegewe data neer. (1)

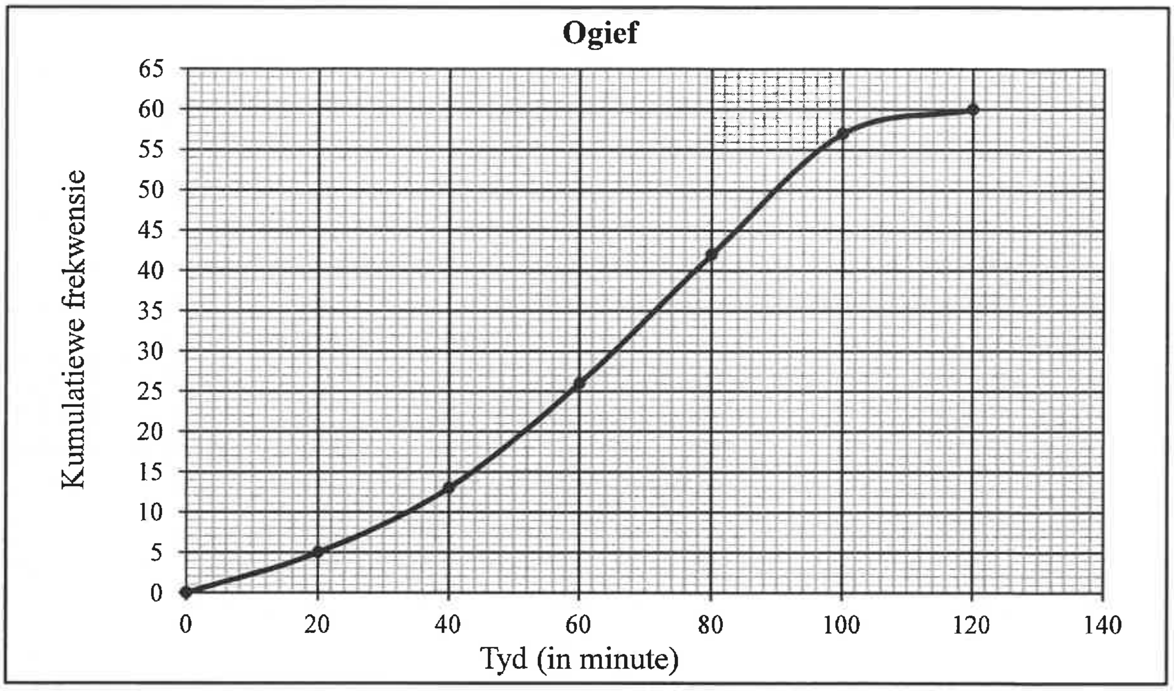
1.5 Die spelers het gedurende die seisoen hard geoefen. Die afrigter het aan die einde van die seisoen gesê dat elke speler 5 opstote per minuut meer as aan die begin van die seisoen kon doen. Hoe beïnvloed die toename in die getal opstote die standaardafwyking van die data? (1)

1.6 Die afrigter het aan die begin van die seisoen die kleinstekwadrate-regressielyn gebruik as die minimum teiken waarna 'n speler moes streef. Bepaal die maksimum moontlike toename in die getal opstote wat 'n speler moet doen om die minimum teiken te bereik. (2)

[10]

VRAAG 2

Die kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) toon die tyd (in minute) wat dit 60 werknemers neem om elke oggend werk toe te reis.



2.1 Skat die mediaan-reistyd. (1)

2.2 Skat die onderste kwartiel. (1)

2.3 Skat die interkwartielvariasiewydte. (2)

2.4 Die minimum en maksimum tye wat dit 'n werknemer neem om werk toe te reis, is onderskeidelik 5 en 120 minute. Op die getallelyn in die ANTWOORDEBOEK, teken 'n mond-en-snordiagram om die verspreiding van die data, soos in die ogief hierbo voorgestel, aan te dui. (2)

2.5 Die maatskappybestuurder het besluit dat alle werknemers wat langer as 'n uur werk toe reis, toegelaat sal word om vir 'n gedeelte van die dag van die huis af te werk. Watter persentasie van die werknemers sal toegelaat word om vir 'n gedeelte van die dag van die huis af te werk? (2)

2.6 Werknemers werk 8 ure in 'n normale werksdag. Die bestuurder besluit op die volgende reël vir tyd om van die huis af te werk:

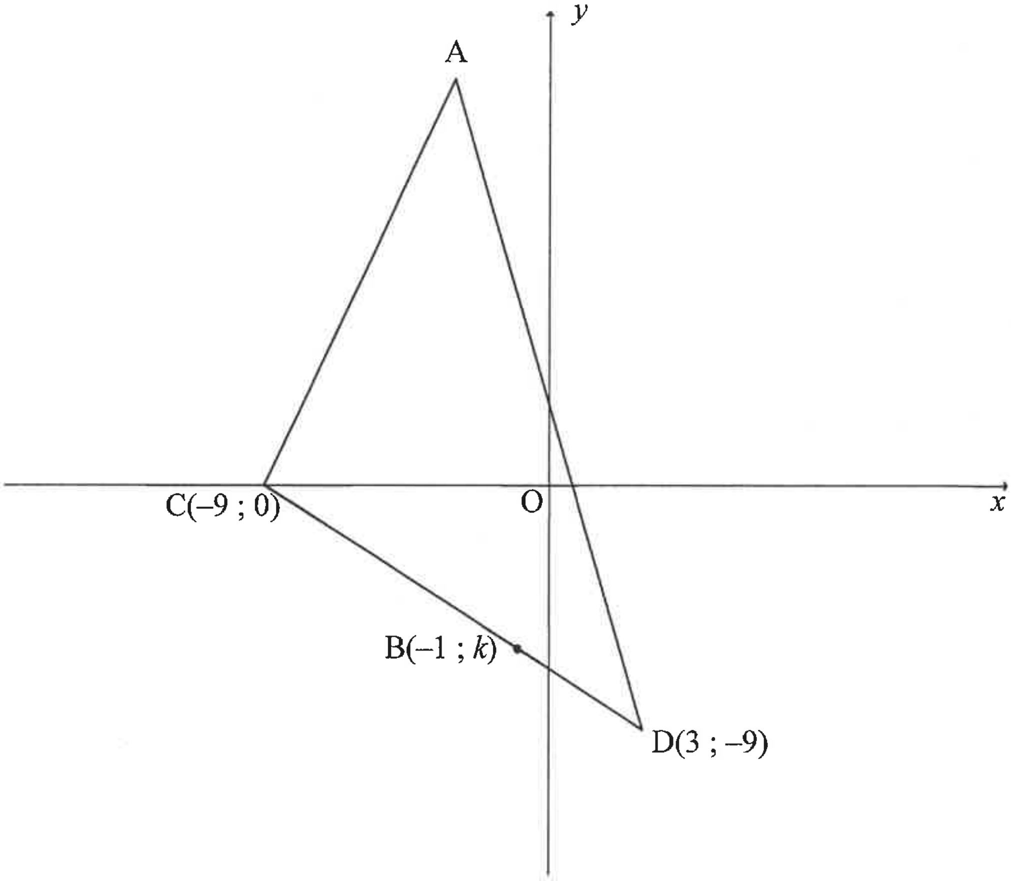
- 'n Werknemer word toegelaat om 'n halfuur van die huis af te werk vir elke tydinterval van 20 minute, of gedeelte daarvan, wat dit langer as 'n uur neem om werk toe te reis.

Op 'n sekere dag neem 'n werknemer 110 minute om werk toe te reis. Bereken die getal minute wat hierdie werknemer op hierdie dag toegelaat sal word om van die huis af te werk. (2)

[10]

VRAAG 3

In die diagram hieronder het ΔACD hoekpunte A, D(3 ; –9) en C(–9 ; 0), waar A 'n punt in die tweede kwadrant is. B(–1 ; k) lê op sy DC.



3.1 Bereken die helling van DC. (2)

3.2 Bepaal die vergelyking van DC in die vorm $y = mx + c$. (2)

3.3 Toon dat $k = -6$. (1)

3.4 Bereken die lengte van DC. (2)

3.5 Bereken die verhouding van $\frac{DB}{DC}$. (2)

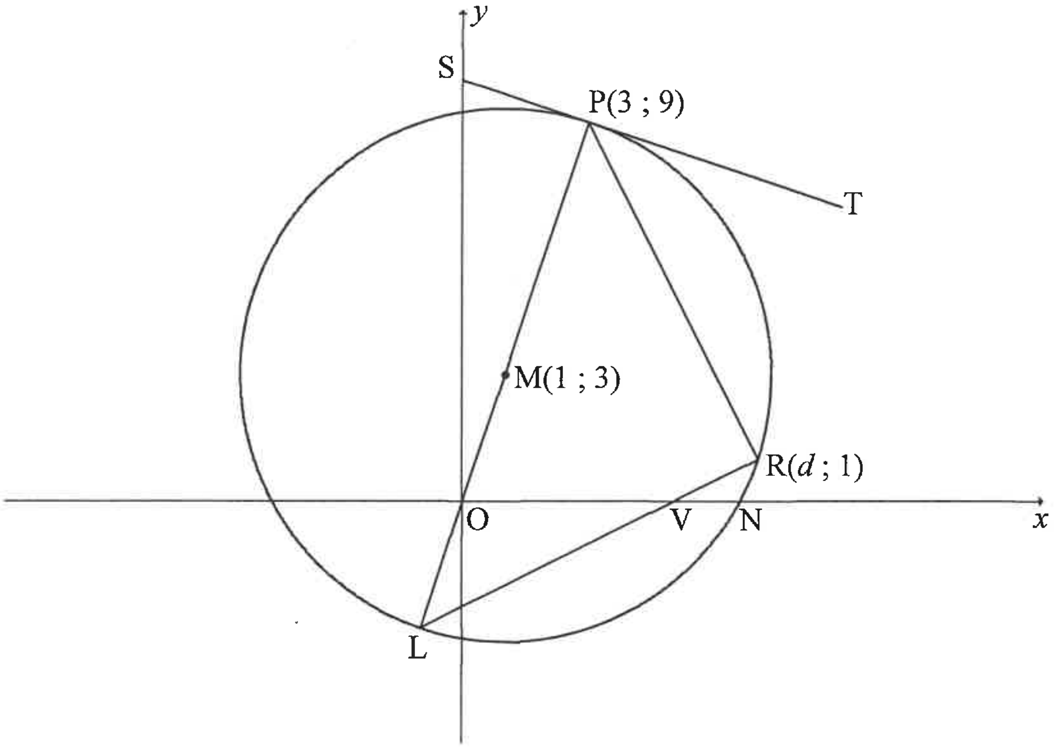
3.6 Indien M 'n punt op AD is sodanig dat AC || MB, bereken die verhouding van $\frac{\text{Area } \Delta MBD}{\text{Area } \Delta ACD}$. (4)

3.7 Indien daar verder gegee word dat die helling van AD, – 4 is en die lengte van AD $\sqrt{612}$ eenhede is, bereken die koördinate van A. (6)

[19]

VRAAG 4

In die diagram is M(1 ; 3) die middelpunt van die sirkel. Die sirkel sny die x-as by N. ST is 'n raaklyn aan die sirkel by P(3 ; 9). R(d ; 1), met $d > 0$, en L is punte op die sirkel. O en V is die x-afsnitte van PL en RL onderskeidelik.

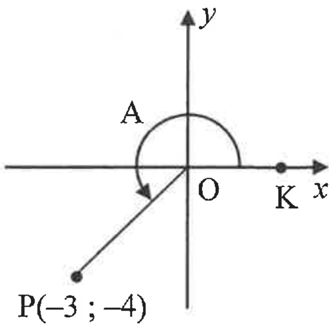


4.1	Skryf die koördinate van L neer.	(2)
4.2	Bepaal die vergelyking van raaklyn ST aan die sirkel by P.	(4)
4.3	Toon dat die vergelyking van die sirkel met middelpunt M, $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 30 = 0$ is.	(4)
4.4	Toon dat $d = 7$.	(2)
4.5	Bereken die grootte van $\hat{L}$	(5)
4.6	TR is 'n raaklyn aan die sirkel by R. Bewys dat PT $\perp$ RT.	(3)

[20]

VRAAG 5

5.1 In die diagram word lyn OP met P(–3 ; –4) gegee. $\hat{KOP} = A$.



Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van:

5.1.1 $\cos A$ (2)

5.1.2 $\cos 2A$ (2)

5.1.3 $\sin(A - B)$, indien daar verder gegee word dat $\sin B = \frac{4}{5}$ en $90° < B < 360°$ (4)

5.2 Indien $\cos\alpha = p$, druk die volgende uitdrukking in terme van p uit:

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)}{2}$$ (4)

[12]

VRAAG 6

6.1 Gegee die identiteit: $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

6.1.1 Gebruik die saamgesteldehoek-identiteit wat hierbo gegee word om 'n formule vir $\cos(x+y)$ af te lei. (2)

6.1.2 Vervolgens, of andersins, toon dat:

$$\frac{\cos(90^\circ-x)\cos y+\sin(-y)\cos(180^\circ+x)}{\cos x\cos(360^\circ+y)+\sin(360^\circ-x)\sin y}=\tan(x+y)$$ (6)

6.2 Gegee: $f(x)=\sqrt{6\sin^2 x-11\cos(90^\circ+x)+7}$

Los op vir x in die interval $x\in(0^\circ\ ;\ 360^\circ)$ as $f(x)=2$. (6)

6.3 Beskou die funksie: $g(x)=\dfrac{4-8\sin^2 x}{3}$

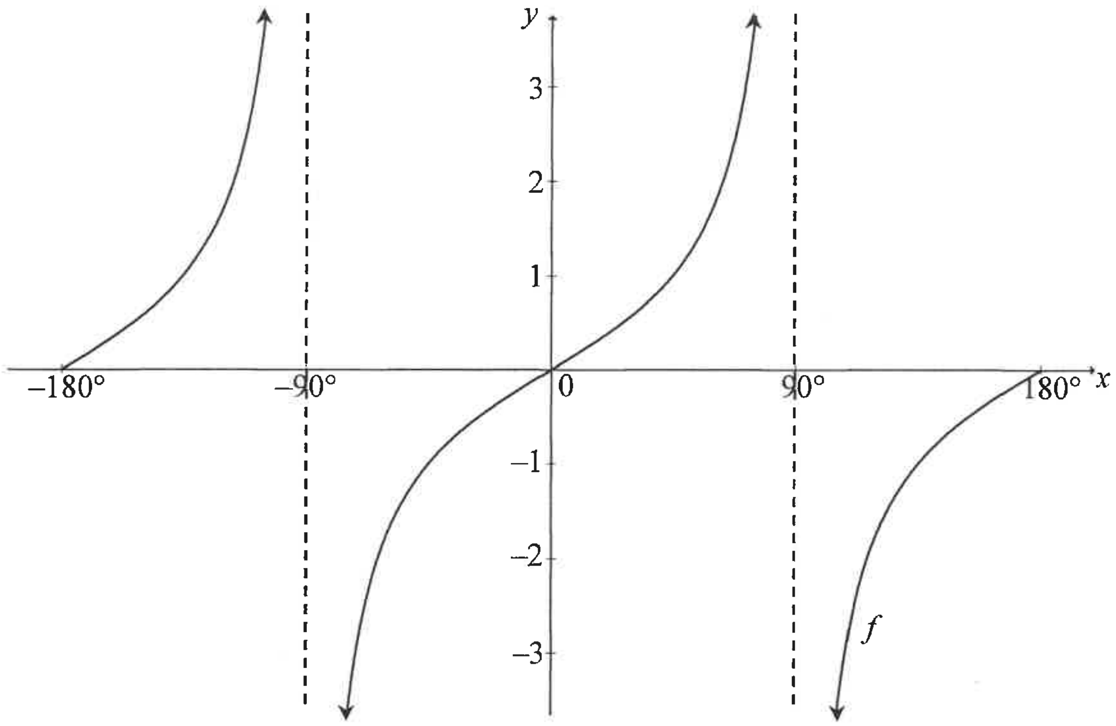
6.3.1 Bereken die maksimum waarde van g. (3)

6.3.2 Skryf die kleinste moontlike waarde van x neer waarvoor g 'n maksimum waarde in die interval $x\in(0^\circ\ ;\ 360^\circ]$ sal hê. (1)

[18]

VRAAG 7

In die diagram hieronder is die grafiek van $f(x) = \tan x$ geteken vir die interval $x \in [-180° ; 180°]$.



7.1 Skryf die vergelyking van die asimptoot van f in die interval $x \in [0° ; 180°]$ neer. (1)

7.2 Skryf die waardes van x in die interval $x \in [-180° ; 0°]$ neer waarvoor $f(x) \leq 0$. (2)

7.3 Gegee: $g(x) = \cos 2x + 1$

7.3.1 Skryf die periode van g neer. (1)

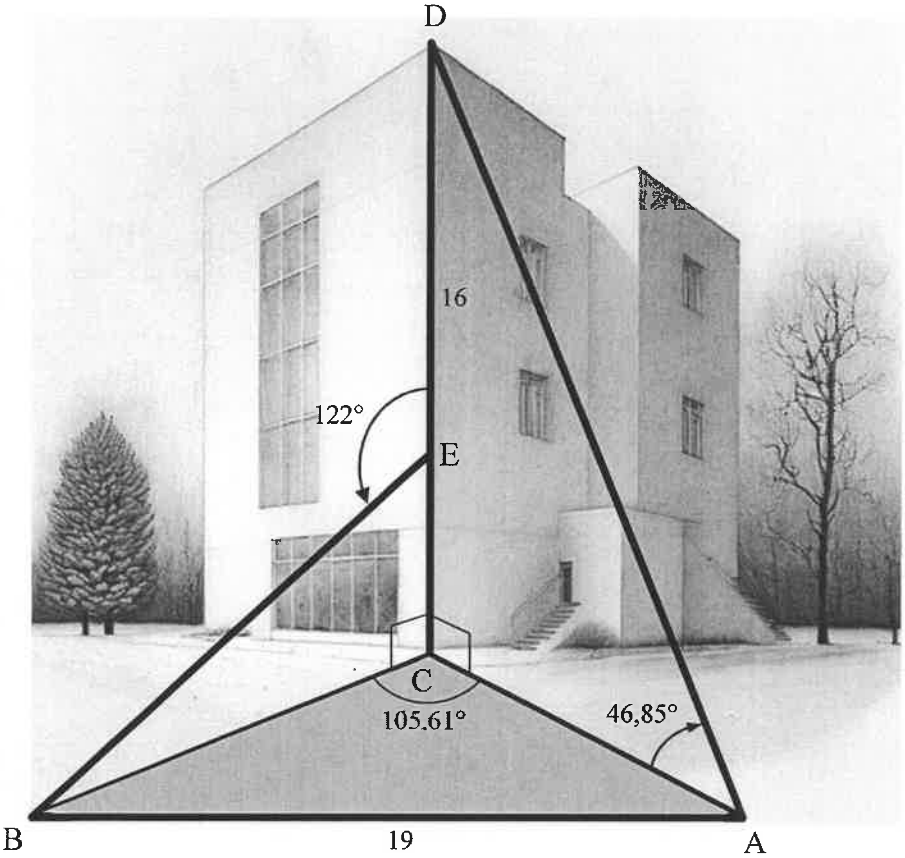
7.3.2 Op die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word, teken die grafiek van $g(x) = \cos 2x + 1$ vir die interval $x \in [-180° ; 180°]$. Toon duidelik die afsnitte met die asse asook die koördinate van die draaipunte. (3)

7.4 Gebruik die grafieke om die algemene oplossing van $2\cos^3 x - \sin x = 0$ te bepaal. (4)

[11]

VRAAG 8

In die diagram is C die voet van 'n vertikale gebou en D die bopunt van dieselfde gebou. Die hoogte van die gebou, CD, is 16 m. Twee waarnemers staan 19 m van mekaar af by punte A en B, waar A, B en C in dieselfde horisontale vlak lê. 'n Verwer werk aan die gebou by punt E. Die hoogtehoek vanaf A na D is 46,85°. $D\hat{E}B = 122°$ en $B\hat{C}A = 105{,}61°$.



8.1 Bereken die lengte van AC, die afstand tussen die waarnemer by A en die voet van die gebou. (2)

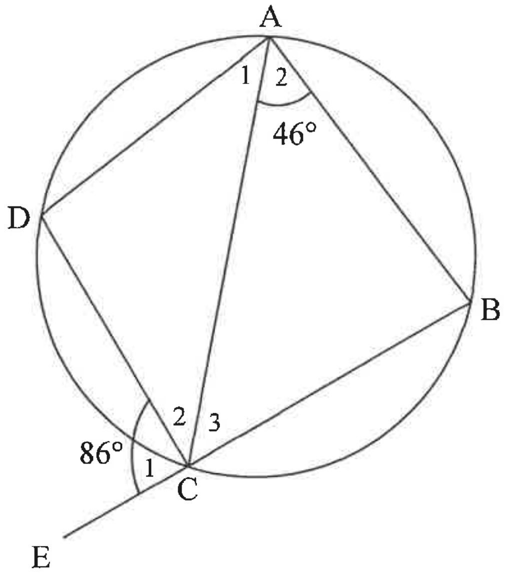
8.2 Bereken hoe ver die verwer by E vanaf die bopunt van die gebou is. (7)

[9]

Gee redes vir jou bewerings in VRAAG 9, 10 en 11.

VRAAG 9

In die diagram is ABCD 'n koordevierhoek. BC is verleng na E. AC is getrek.
$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{A}_2 = 46°$ en $\hat{C}_1 = 86°$.

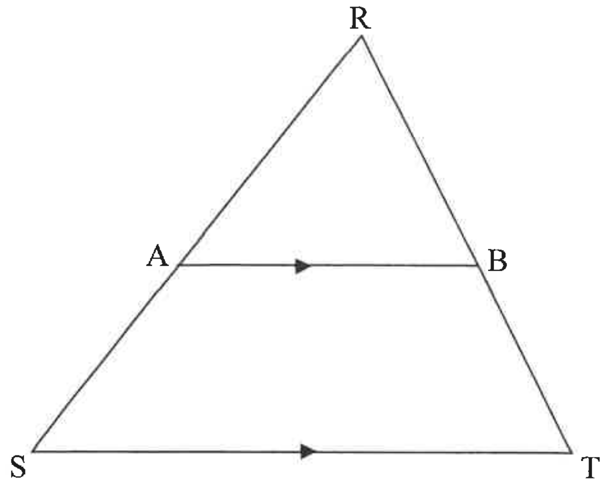


9.1 Bereken, met 'n rede, die waarde van $\hat{A}_1$. (2)

9.2 Bewys vervolgens dat AD = DC. (4)
[6]

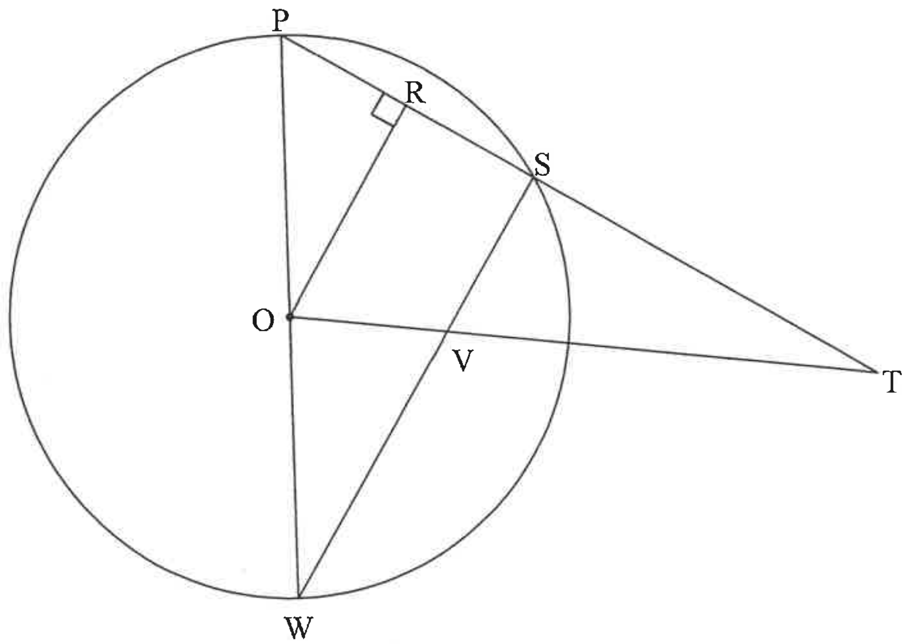
VRAAG 10

10.1 In die diagram is ΔRST geteken. Lyn AB sny RS en RT by A en B onderskeidelik sodanig dat $AB \parallel ST$.



Bewys die stelling wat sê dat 'n lyn wat ewewydig aan een sy van 'n driehoek getrek word, die ander twee sye eweredig verdeel, m.a.w. $\frac{RA}{AS} = \frac{RB}{BT}$ (6)

10.2 In die diagram is O die middelpunt van die sirkel. ΔPWS is geteken met P, W en S op die sirkel. $OR \perp PS$. PRS is verleng na T. SW en OT sny by V. $OV : OT = 1 : 4$



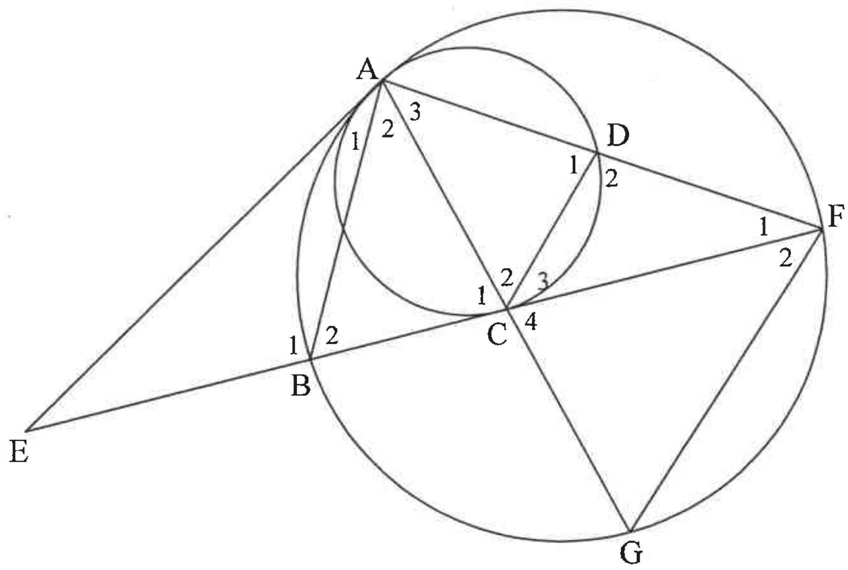
10.2.1 Bewys, met redes, dat $OR : WS = 1 : 2$ (5)

10.2.2 Bereken die lengte van PT as $ST = 15$ eenhede. (4)

[15]

VRAAG 11

In die diagram is A, B, G en F punte op die groter sirkel. 'n Kleiner sirkel is getrek om die groter sirkel inwendig by A te sny. EA is 'n gemeenskaplike raaklyn aan beide sirkels. EBCF is 'n raaklyn aan die kleiner sirkel by C. AC is verleng na G. AF sny die kleiner sirkel by D. AB, CD en GF is getrek.



11.1 As $E\hat{A}G = x$, bepaal met redes, VIER ander hoeke wat aan x gelyk is. (6)

11.2 Bewys dat AG.AD = AC.AF (4)

11.3 Bewys dat $\Delta AGF \,|||\, \Delta ABC$ (4)

11.4 Bewys dat $GF^2 = \dfrac{BC.FC.AF}{AD}$ (6)

[20]

TOTAAL: 150

INLIGTINGSBLAD

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$A = P(1+ni)$ $\quad A = P(1-ni)$ $\quad A = P(1-i)^n$ $\quad A = P(1+i)^n$

$T_n = a + (n-1)d$ $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$T_n = ar^{n-1}$ $\quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$; $r \neq 1$ $\quad S_\infty = \frac{a}{1-r}$; $-1 < r < 1$

$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$ $\quad P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$y = mx + c$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \tan\theta$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

In ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$area\ \Delta ABC = \frac{1}{2}ab.\sin C$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$ $\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $\quad P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$

$\hat{y} = a + bx$ $\quad b = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2}$